Méthode de Newton pour les polynômes

Geoffrey Deperle

Leçons associées :
- 223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.
- 224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.
- 226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.
- 228 : Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.
- 230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Le but de ce développement est de montrer le théorème suivant :

Théorème. *Soit $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_r$ des réels, m_i des entiers non nuls et $P = \prod_{i=1}^{r}(X-\xi_i)^{m_i}$. Considérons*

$$\begin{cases} x_0 > \xi_r \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)} \end{cases}$$

La suite (x_n) est strictement décroissante et converge vers ξ_r.

- *Si $m_r = 1$ alors $\forall c > 0, |x_n - \xi_r| = \underset{n\to+\infty}{o}(c^n)$ (convergence surlinéaire)*
- *Si $m_r > 1$ alors $\exists c \neq 0, |x_n - \xi_r| \underset{n\to+\infty}{\sim} c\left(1 - \dfrac{1}{m_r}\right)^n$ (convergence linéaire)*

Preuve : La fonction $\frac{P'}{P}$ est la dérivée logarithmique de P, on a donc $\dfrac{P'}{P} = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{x_n - \xi_i}$ On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{x_n - \xi_i}\right)^{-1}$ donc si $x_n > \xi_r$, alors $x_{n+1} < x_n$.

Étape 1 : Montrons la convergence de la suite (x_n)

D'après la remarque préliminaire, (x_n) est décroissante. Montrons qu'elle est minorée par ξ_r.
On a déjà $x_0 > \xi_r$.
Supposons que pour un $n \in \mathbb{N}$, $x_n > \xi_r$, montrons que $x_{n+1} > \xi_r$.
Soit $f : x \mapsto x - \frac{P(x)}{P'(x)}$, f se prolonge par continuité sur $[\xi_r, +\infty[$ en posant $f(\xi_r) = \xi_r$.
On a $\forall x \in]\xi_r, +\infty[, f'(x) = \frac{P(x)P''(x)}{P'(x)^2}$, D'après le théorème de Rolle (ou de Gauss-Lucas), les zéros de P' sont dans $[\xi_1, \xi_r]$, de même pour P'' donc P, P' et P'' sont strictement positives sur $]\xi_r, +\infty[$ donc $f' > 0$ et f est croissante sur cet intervalle.

Comme $x_n > \xi_r$, on a par croissance, $\xi_r = f(\xi_r) < f(x_n) = x_{n+1}$.
Ainsi, par récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > \xi_r$.
(x_n) est décroissante, minorée par ξ_r donc converge vers un réel où $\frac{P}{P'}$ s'annule donc vers ξ_r.

Étape 2 : Déterminons la vitesse de convergence

On a $\dfrac{P'(x)}{P(x)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{x-\xi_i}$ donc en dérivant, on a

$$\frac{P''(x)P(x) - P'(x)^2}{P(x)^2} = -\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{(x-\xi_i)^2}$$

Donc

$$f'(x) = \frac{P(x)P''(x)}{P'(x)^2} = 1 - \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{x-\xi_i}\right)^{-2}}_{\underset{x\to\xi_r}{\sim} \frac{(x-\xi_r)^2}{m_r^2}} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{(x-\xi_i)^2}\right)}_{\underset{x\to\xi_r}{\sim} \frac{m_r}{(x-\xi_r)^2}}$$

Donc $\lim\limits_{x\to\xi_r} f'(x) = 1 - \frac{1}{m_r}$.

Deux cas de figure se présentent alors,

Supposons $m_r = 1$

On a $f'(\xi_r) = 0$, d'après l'égalité des accroissements finis,

$$\exists y_n \in]\xi_r, x_n[\,/\, x_{n+1} - \xi_r = f(x_n) - f(\xi_r) = (x_n - \xi_r)f'(y_n)$$

Soit $c > 0$, comme $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \xi_r$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, |f'(y_n)| \leq c$.
Pour $n \geq n_0$, $|x_{n+1} - \xi_r| \leq c|x_n - \xi_r|$ d'où par récurrence, et donc par récurrence, pour $n \geq n_0$, $|x_n - \xi_r| \leq c^{n-n_0}|x_{n_0} - \xi_r| = \underset{n\to+\infty}{O}(c^n)$.
En prenant $c' < c$, on a $x_n - \xi_r = \underset{n\to+\infty}{o}(c^n)$ pour tout $c > 0$.

Supposons $m_r > 1$

On a alors $f'(\xi_r) = 1 - \frac{1}{m_r}$ et de même,

$$\exists y_n \in]\xi_r, x_n[\,/\, x_{n+1} - \xi_r = f(x_n) - f(\xi_r) = (x_n - \xi_r)f'(y_n)$$

Donc $(\ln(x_{n+1} - \xi_r) - \ln(x_n - \xi_r))$ converge vers $\ln f'(\xi_r) \neq 0$ donc par sommation des relations de comparaison dans le cas divergent (ou théorème de Césaro), on a

$$\ln(x_n - \xi_r) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \ln f'(\xi_r)$$

Précisons le développement asymptotique en montrant que la suite $(\ln(x_n - \xi_r) - n\ln f'(\xi_r))$ converge.
Par Taylor-Lagrange, il existe $z_n \in]\xi_r, x_n[$ tel que

$$x_{n+1} - \xi_r = f'(\xi_r)(x_n - \xi_r) + \frac{f''(z_n)}{2}(x_n - \xi_r)^2$$

d'où $\varepsilon_n = \dfrac{x_{n+1} - \xi_r}{f'(\xi_r)(x_n - \xi_r)} - 1 = \underset{n\to+\infty}{O}(x_n - \xi_r)$.
Comme $\ln(x_n - \xi_r) \sim n \ln f'(\xi_r)$,
Il existe une suite (α_n) tel que $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et tel que $\ln(x_n - \xi_r) = n\alpha_n \ln f'(\xi_r)$ donc

$$|x_n - \xi_r| = e^{\alpha_n} f'(\xi_r)^n$$

donc en choisissant c dans l'intervalle $]f'(\xi_r), 1[$ on a $|x_n - \xi_r| = \underset{n\to+\infty}{O}(c^n)$ d'où

$$\ln(x_{n+1} - \xi_r) - \ln(x_n - \xi_r) - \ln f'(\xi_r) = \ln(1 + \varepsilon_n) = \underset{n\to+\infty}{O}(c^n)$$

et la série $\sum c^n$ converge donc par sommation des relations de comparaison, $(\ln(x_n - \xi_r) - n \ln f'(\xi_r))$ converge vers un réel λ et

$$x_n - \xi_r \sim e^{\lambda} f'(\xi_r)^n$$

$\square$

Références

[1] Antoine Chambert-Loir et Stéfane Fermigier. *Analyse 2. Exercices.* Dunod, 1999.